منصة مدرسية تعليمية

الفصل (٣)
المتطابقات والمعادلات المثلثية

٣ـ١

٣ـ٢

٣ـ٣

٣ـ٤

٣ـ٥

عودة لفهرس تدرب

المتطابقات المثلثية

٣ ـ ١

تدرب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية علما بأن: $0° < \theta < 90°$ (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$

$\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

3) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$. (مثال 1)

4 $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ — $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

5 $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ — $\sec\theta = \sqrt{2}$

6 $\cos\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{5}{3}$ — $\cos\theta = \frac{4}{5}$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

7 $\tan\theta\cos^2\theta$ — $\sin\theta\cos\theta$

8 $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ — 1

9 $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ — $\cot^2\theta$

10 $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ — $\sec^3\theta$

11 $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$ — $\csc\theta$

12 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ — 1

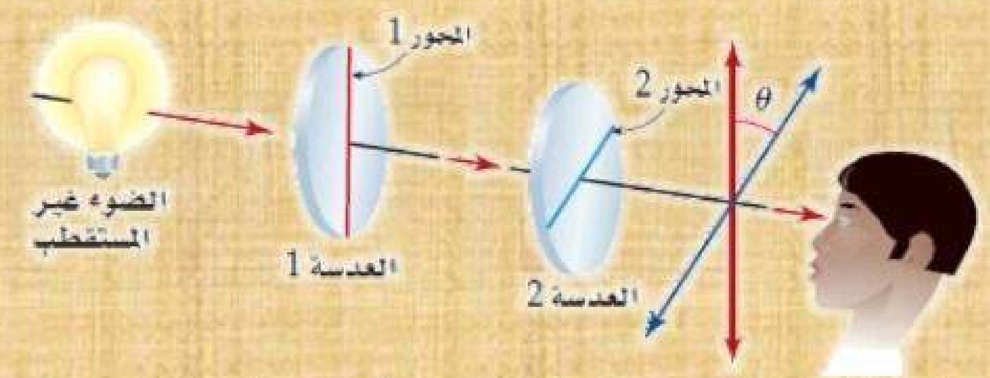
13 $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ — $-\cot\theta$

14 $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$ — $\cos^2\theta$

15 $2 - 2\sin^2\theta$ — $2\cos^2\theta$

الحل

16 بصريات: عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة ستقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos \theta$

$$I = I_0 \cos^2\theta$$

b) استعمل الصيغة المبسطة ، لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

$I = \frac{3}{4} I_0$؛ شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية.

الحل

17 **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم e. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W، واكتب إجابتك بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\sin \theta$ أو $\cos \theta$.

$$W = e\ AS\ \cos\theta$$

b) أوجد W إذا كانت $S = 1000\ W/m^2,\ e = 0.80,\ \theta = 40°,\ A = 0.75$. (قرّب إلى أقرب جزء من مئة).

459.63 W

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

18 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد إذا كانت معادلة ما تمثل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0	30^o	45^o	60^o
$tan^2\theta - sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$tan^2\theta\ sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًا.

c) **تحليليًا:** إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين غير متطابقين؛ فإن المعادلة ليست متطابقة. هل التمثيلان البيانيان في الفرع **b** متطابقان؟

نعم.

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

نعم.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

19 **التزلج على الجليد:** يتزلج شخص كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة يتم استعمال نظام المعادلات الآتي:
$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

$$\mu_k = \tan\theta$$

بسط كل مما يأتي:

20 $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}{1 + \sin(-\theta)}$$

$$-1$$

21 $$\frac{\sec\theta\sin\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sec\theta}$$

$$\sin\theta$$

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

٣ ـ ٢

تدرب وحل المسائل

اثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال ١)

1. $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2. $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

الحل

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$

$$\cot\theta\,(\cot\theta + \tan\theta)$$
$$= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

عودة لفهرس الفصل (٣)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

3 $1 + \sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^2\theta$

$$1 + \sec^2\theta \, \sin^2\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta} \, \sin^2\theta$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 1 + \tan^2\theta$$

$$= \sec^2\theta$$

4 $\sin\theta \sec\theta \cot\theta = 1$

$$\sin\theta \, \sec\theta \, \cot\theta$$

$$= \sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\text{con}\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\text{con}\theta}{\sin\theta}$$

$$= 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

5 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6 $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7 $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8 $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9 $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10 $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

11 اختيار من متعدد: أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$

B $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$

D $\csc^2\theta$

$\csc^2\theta$ D

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

12 $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

13 $\frac{1 + \tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$

14 $\sec\theta \csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

منصة مدرسية تعليمية

الحل

16 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2 + \sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17 $\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

18 $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

19 $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

20 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21 $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

22 $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23 $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

24

يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود، فإنها تكوّن مع الحبل شكلاً مخروطيًا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g \sec \theta}{\omega^2}$ ، فهل الصيغة $L = \frac{g \tan \theta}{\omega^2 \sin \theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك

25

جري: مضمار سباق نصف قطره 16.7 m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos \theta$ أولاً، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

6.5 m/S

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

عند تبسيط كل من العبارات الآتية، هل تحصل على 1 أم −1 ؟

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

1

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

-1

28) $\sin^2(-\theta)+\cos^2(-\theta)$

1

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

1

30) $\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta)$

1

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

-1

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$

1

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$

-1

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

بسّط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34 $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

$\cos\theta$

35 $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

$\tan\theta$

36 $\dfrac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2x+\sin^2x}$

1

37 $\tan\theta\cos\theta$

$\sin\theta$

38 $\cot\theta\tan\theta$

1

39 $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

1

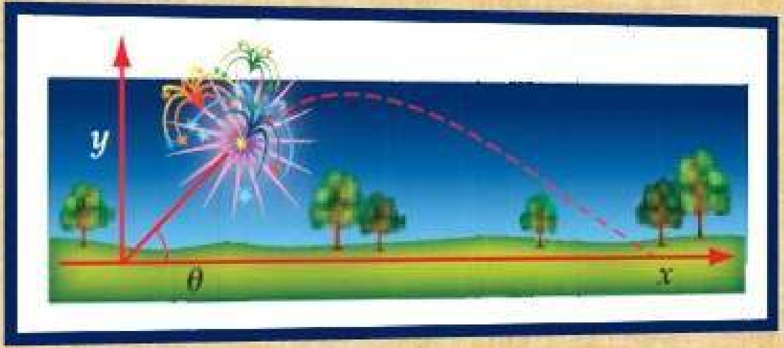
40 $(\sec^2\theta+\csc^2\theta)-(\tan^2\theta+\cot^2\theta)$

2

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

41 فيزياء: عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث تظهر الدالة المثلثية $\tan\theta$ وحدها في العلاقة.



$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2}(\tan^2\theta + 1) + x\tan\theta$$

42 إلكترونيات: عند مرور تيار متردد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تعطى بالصيغة: $P = I_0^2R\sin^2 2\pi ft$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi ft$.

$$P = I_0^2 R(1 - \cos^2 2\pi ft)$$

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi ft$.

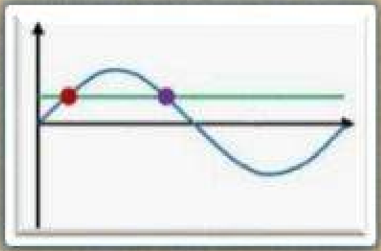
$$P = \frac{I_0^2 R}{\csc^2 2\pi ft}$$

تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثلثية مثل $2\sin x = 1$

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

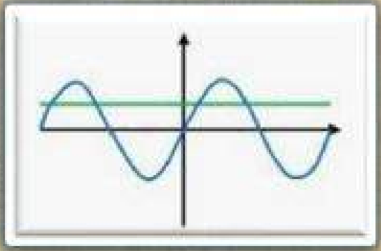
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

b) **بيانيًا:** مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع a بيانيًا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$ ، $y = \sin x$
عند النقاط $x = \frac{5\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$ ، على الفترة $[0 , 2\pi)$

c) **بيانيًا:** مثل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع a بيانيًا ، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما ، وأوجد قيم x بالراديان.



يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \frac{1}{2}$ ، $y = \sin x$
عند النقاط $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-7\pi}{6}$ ، $\frac{-11\pi}{6}$ ، على الفترة $(-2\pi , 2\pi)$

d) **لفظيًا:** خمن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي
$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ، $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح.

٣-٣ المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

تدريب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165° = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) $\sin(-30°) = -\frac{1}{2}$

5) $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\sin(-210°) = \frac{1}{2}$

7) $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $\tan 195° = 2-\sqrt{3}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

9 كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$.c = 2sin(90^o t + 30^o t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$\sqrt{3}$ أمبير.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 3)

10 $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

12 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13 $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

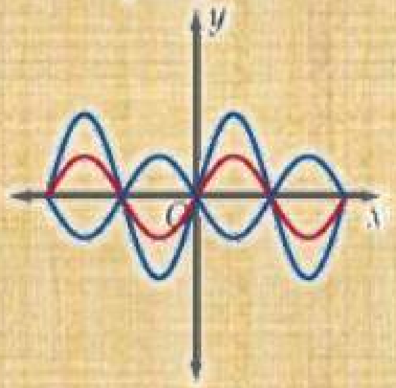
15 $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

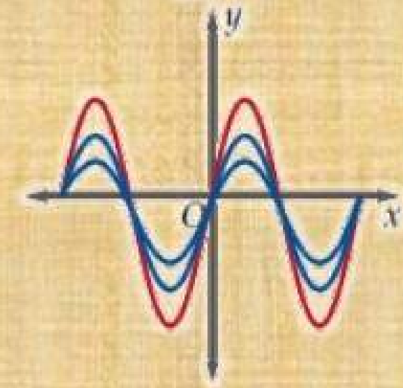
الحل

16 **الكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناء، وبعكس ذلك يكون هداما.

تداخل هدام



تداخل بناء



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:

$y_1 = 10 \sin (2t + 210°), y_2 = 10 \sin (2t + 30°)$.

تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسر معناه.

مجموع الدالتين يساوي صفر، و معناه تداخل هدام.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$

$-2+\sqrt{3}$

18) $\sec 1275°$

$\sqrt{2}-\sqrt{6}$

19) $\sin 735°$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

20) $\tan \frac{23\pi}{12}$

$-2+\sqrt{3}$

21) $\csc \frac{5\pi}{12}$

$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

22) $\cot \frac{113\pi}{12}$

$2-\sqrt{3}$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

23

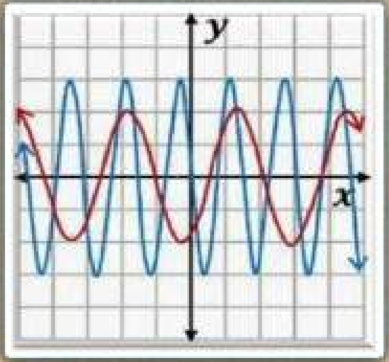
قوة: في الشكل أدناه، إذا كان مقدار القوة الكافية F لإبقاء الحزنة ثابتة على المنحدر تعطى بالعلاقة $F = \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A}$ ، حيث W هو وزن الخزنة، $\mu = \tan \theta$ ، فبيّن أن $F = W \tan (A + \theta)$.

الحل

24 تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A+B)$	$\sin A + \sin B$
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.



b) **بيانيًا:** افرض أن B أقل من A بـ 15° دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًا من: $y = \sin(x + x - 15)$، $y = \sin x + \sin(x - 15)$ على الشاشة نفسها.

c) **تحليليًا:** حدّد إذا كانت $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسر إجابتك.

$\sin(45 + 60) = \sin 45 + \sin 60$
الطرف الأيمن يساوي 1.57 تقريباً. وبما أن قيمة
جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1، فإن هذه
الجملة الرياضية لا بد أن تكون خطأ.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

25 $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26 $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27 $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

28 $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

٣ـ٤ المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

تدريب وحل المسائل

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1 $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

$sin2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ، $cos2\theta = \frac{7}{8}$

$sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$ ، $cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$

2 $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

$sin2\theta = -\frac{24}{25}$ ، $cos2\theta = -\frac{7}{25}$

$sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ، $cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

3 $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$sin2\theta = -\frac{24}{25}$ ، $cos2\theta = -\frac{7}{25}$

$sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ، $cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

عودة لفهرس الفصل (٣)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

5

$\sin\theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

$\cos 2\theta = \frac{1}{9}$ ، $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

4

$\tan\theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

$\cos 2\theta = \frac{161}{289}$ ، $\sin 2\theta = -\frac{240}{289}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

7

$\tan\theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos 2\theta = \frac{-3}{5}$ ، $\sin 2\theta = \frac{-4}{5}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}$

6

$\sin\theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\cos 2\theta = \frac{-161}{289}$ ، $\sin 2\theta = \frac{240}{289}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ ، $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$ — $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

9) $\cos 15°$ — $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

10) $\sin 75°$ — $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

11) $\tan 165°$ — $\sqrt{3} - 2$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$ — $\sqrt{3} - 2$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

13

كرة قدم: ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها °37 مع سطح الأرض، وبسرعة إبتدائية متجهة مقدارها 52ft/s. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$، و v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملاً المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

$$.d = \frac{2v^2 \sin 2\theta}{g}$$

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة.

81 ft تقريباً.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة: (مثال 5)

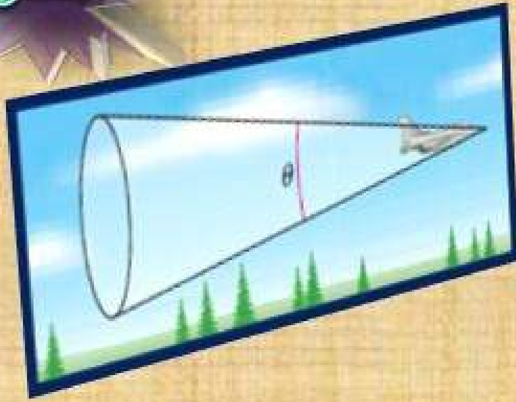
14 $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

16 $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

17 $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$

الحل



18 **العدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بالعدد ماخ M بحسب العلاقة $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{M}$.

a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{1}{M}$$

b) إذا كان $\cos\theta=\frac{17}{18}$، فاستعمل التعبير الذي وجدته في **a** لحساب قيمة العدد ماخ.

6

19 **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة: $P=I_0{}^2 R\sin^2 t\theta$.

عبِّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

$$P=\frac{1}{2}I_0^2R-\frac{1}{2}I_0^2R\cos 2t\theta.$$

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

20 كرة قدم: ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة إبتدائية مقدارها $95\,ft/s$. برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° + A, \theta = 45° - A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21 $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

$sin2\theta = \frac{24}{25}$ ، $cos2\theta = \frac{7}{25}$ ، $tan2\theta = \frac{24}{7}$

22 $\sin\theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$sin2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ ، $cos2\theta = \frac{7}{9}$ ، $tan2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

23 $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$

$sin2\theta = \frac{-3}{5}$ ، $cos2\theta = \frac{-4}{5}$ ، $tan2\theta = \frac{3}{4}$

24 $\sec\theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

$sin2\theta = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$ ، $cos2\theta = \frac{1}{8}$ ، $tan2\theta = -3\sqrt{7}$

25 $\cot\theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

$sin2\theta = \frac{12}{13}$ ، $cos2\theta = \frac{5}{13}$ ، $tan2\theta = \frac{12}{5}$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

26 تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x)\ (\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})$ بيانيًا في الفترة $-2\pi\le x\le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(x)$، ثم أثبت صحتها جبريًا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(x)=\cos^2(\theta-\frac{\pi}{3})-\sin^2(\theta-\frac{\pi}{3})$ بيانيًا في الفترة $-2\pi\le x\le 2\pi$ ،

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(x)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

٣_٥ حل المعادلات المثلثية

تدريب وحل المسائل

الحل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها: (مثال ١)

1. $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$ — 180^o
2. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$ — 60^o ، 180^o ، 300^o
3. $\cos 2\theta = 8 - 15\sin\theta ; 0° \le \theta \le 360°$ — 30^o ، 150^o
4. $\sin\theta + \cos\theta = 1 ; 0° \le \theta \le 360°$ — 0^o ، 90^o

عودة لفهرس الفصل (٣)

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5 $4\sin^2\theta - 1 = 0$

$\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

6 $2\cos^2\theta = 1$

$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

7 $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta = 1$

$2k\pi$ ، $\frac{\pi}{3} + 4k\pi$ ، $\frac{5\pi}{3} + 4k\pi$

8 $\cos 2\theta + 4\cos\theta = -3$

$\pi + 2k\pi$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9 $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

$90^o + k.180^o$

10 $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

$k.180^o$ ، $90^o + k.360^o$

11 $2\sin^2\theta - 1 = 0$

$45^o + k.90^o$

12 $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

$90^o + k.180^o$, $150^o + k.360^o$,
$30^o + k.360^o$

منصة مدرسية تعليمية

الحل

13 **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365} t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس. فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل؟ فسّر إجابتك.

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14 $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\pi$

15 $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

16 $\tan \theta = 1$

$45^o + k.180^o$ ، $\frac{\pi}{4} + k.\pi$

17 $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$

60^o ، 120^o ، 240^o ، 300^o

18 $2\sin^2 \theta = 1; 90° < \theta < 270°$

135^o ، 225^o

19 $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

20 $4\sin^2 \theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

210^o ، 330^o

21 $\tan \theta - \sin \theta = 0$

$0^o + k.180^o$

22 $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$

$30^o + k.360^o$ ، $150^o + k.360^o$

منصة مدرسية تعليمية

الحل

23 الكترونيات: يبلغ ارتفاع برج لبث التلفزيوني 2064 ft. أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 1 m؟

24 أنهار: تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام، حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$، 0 تدل على الساعة الثانية عشر منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا.....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟ 11 m

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟ 7 صباحاً ، 7 مساءً

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25 $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

$\frac{\pi}{2} + k.2\pi$

26 $2\sin^2\theta + (\sqrt{2}-1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5\pi}{4} + k.2\pi$ ، $\frac{7\pi}{4} + k.2\pi$ ،

$\frac{\pi}{6} + k.2\pi$ ، $\frac{5\pi}{6} + k.2\pi$

27 $2\sin\theta = \sin 2\theta$

$\pi.k$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28 $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29 $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

$240^o + k.360^o$ ، $120^o + k.360^o$

الحل

30

الماس: حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1. وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو $35°$، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًا ونقيًا أو لا.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الفصل (٤)
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

٤-١

٤-٢

٤-٣

٤-٤

٤-٥

عودة لفهرس تدرب

حاول
منصة مدرسية تعليمية

القطوع المكافئة

٤ـ١

تدريب وحل المسائل

الحل

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا: (مثال ١)

1 $(x-3)^2 = 12(y-7)$

❶ الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأعلى
❷ الرأس: $(3, 7)$
❸ البؤرة: $(3, 10)$
❹ معادلة محور التماثل: $x = 3$
❺ معادلة الدليل: $y = 4$
❻ طول الوتر البؤري: 12

2 $(x+1)^2 = -12(y-6)$

❶ الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأسفل
❷ الرأس: $(-1, 6)$
❸ البؤرة: $(-1, 3)$
❹ معادلة محور التماثل: $x = -1$
❺ معادلة الدليل: $y = 9$
❻ طول الوتر البؤري: 12

عودة لفهرس الفصل (٤)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

3 $(y-4)^2 = 20(x+2)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
2. الرأس: $(-2, 4)$
3. البؤرة: $(3, 4)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 4$
5. معادلة الدليل: $x = -7$
6. طول الوتر البؤري: 20

4 $-40(x+4) = (y-9)^2$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليسار
2. الرأس: $(-4, 9)$
3. البؤرة: $(-14, 9)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 9$
5. معادلة الدليل: $x = 6$
6. طول الوتر البؤري: 40

5 $(y+5)^2 = 24(x-1)$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
2. الرأس: $(1, -5)$
3. البؤرة: $(7, -5)$
4. معادلة محور التماثل: $y = -5$
5. معادلة الدليل: $x = -5$
6. طول الوتر البؤري: 24

6 $-4(y+2) = (x+8)^2$

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأسفل
2. الرأس: $(-8, -2)$
3. البؤرة: $(-8, -3)$
4. معادلة محور التماثل: $x = -8$
5. معادلة الدليل: $y = -1$
6. طول الوتر البؤري: 4

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

7 **لوح تزلج:** صمم بدر لوح تزلج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$، حيث x, y بالأقدام. كم المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

4ft

8 **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج من أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

$$(y + 5)^2 = 180(x - 3)$$

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

45ft

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدد خصائصه ومثّله منحناه بيانيًا: (مثال 3)

9 $x^2 - 17 = 8y + 39$

$x^2 = 8(y + 7)$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأعلى
2. الرأس: $(0 , -7)$
3. البؤرة: $(0 , -5)$
4. معادلة محور التماثل: $x = 0$
5. معادلة الدليل: $y = -9$
6. طول الوتر البؤرى: 8

10 $y^2 + 33 = -8x - 23$

$y^2 = -8(y + 7)$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليسار
2. الرأس: $(-7 , 0)$
3. البؤرة: $(-9 , 0)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 0$
5. معادلة الدليل: $x = -5$
6. طول الوتر البؤرى: 8

11 $3x^2 + 72 = -72y$

$x^2 = -24(y + 1)$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح رأسياً إلى أسفل
2. الرأس: $(0 , -1)$
3. البؤرة: $(0 , -7)$
4. معادلة محور التماثل: $x = 0$
5. معادلة الدليل: $y = 5$
6. طول الوتر البؤري: 24

12 $60x - 80 = 3y^2 + 100$

$y^2 = 20(x - 3)$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
2. الرأس: $(3 ,0)$
3. البؤرة: $(8 , 0)$
4. معادلة محور التماثل: $y = 0$
5. معادلة الدليل: $x = -2$
6. طول الوتر البؤرى: 20

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

13

$$-33 = x^2 - 12y - 6x$$

$$(x-3)^2 = 12(y-2)$$

خصائص القطع :

❶ الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسياً إلى الأعلى
❷ الرأس:	$(3\ ,\ 2)$
❸ البؤرة:	$(3\ ,\ 5)$
❹ معادلة محور التماثل:	$x = 3$
❺ معادلة الدليل:	$y = -1$
❻ طول الوتر البؤري:	12

14

$$-72 = 2y^2 - 16y - 20x$$

$$(y-4)^2 = 10(x-2)$$

خصائص القطع :

❶ الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقياً إلى اليمين
❷ الرأس:	$(2\ ,4)$
❸ البؤرة:	$(4.5\ ,\ 4)$
❹ معادلة محور التماثل:	$y = 4$
❺ معادلة الدليل:	$x = -0.5$
❻ طول الوتر البؤري:	10

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15

البؤرة $(-9, -7)$، والرأس $(-9, -4)$

$$(x+9)^2 = -12(y+4)$$

16

البؤرة $(3, 3)$؛ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

$$(x-3)^2 = 20(y+2)$$

حلول

منصة مدرسية تعليمية

الحل

17 البؤرة $(-4, -1)$، والرأس $(2, -1)$

$$(y+1)^2 = 24(x+4)$$

18 البؤرة $(11, 4)$؛ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

$$(y-4)^2 = 12(x-8)$$

19 البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$

$$(y+2)^2 = -16(x-1)$$

20 المنحنى مفتوح رأسيًا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

$$x^2 = -12(y+2)$$

21 البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$

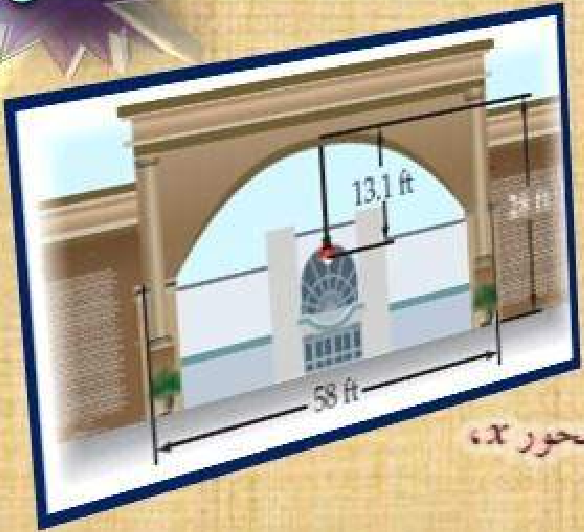
$$(x+3)^2 = 8(y-2)$$

22 الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

$$(y-2)^2 = -8(x+3) \quad \text{أو} \quad (y-2)^2 = 8(x+3)$$

الحل

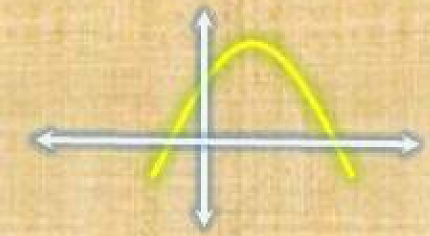
23 **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين، وثُبِّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

$$(x-9)^2 = -52.4(y-28)$$

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًا.



حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24 $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$ ؛ $(-5, -5)$

$y = -8x - 45$

25 $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)$ ؛ $(24, 2)$

$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$

26 $(x+6)^2 = 3(y-2)$ ؛ $(0, 14)$

$y = 4x + 14$

27 $-4x = (y+5)^2$ ؛ $(0, -5)$

$x = 0$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ المعطاة بعض خصائصه في كل مما يأتي:

28 الدليل $y = 4$ وَ $p = -2$

مفتوح إلى أسفل

29 $y^2 = -8(x-6)$

مفتوح إلى اليسار

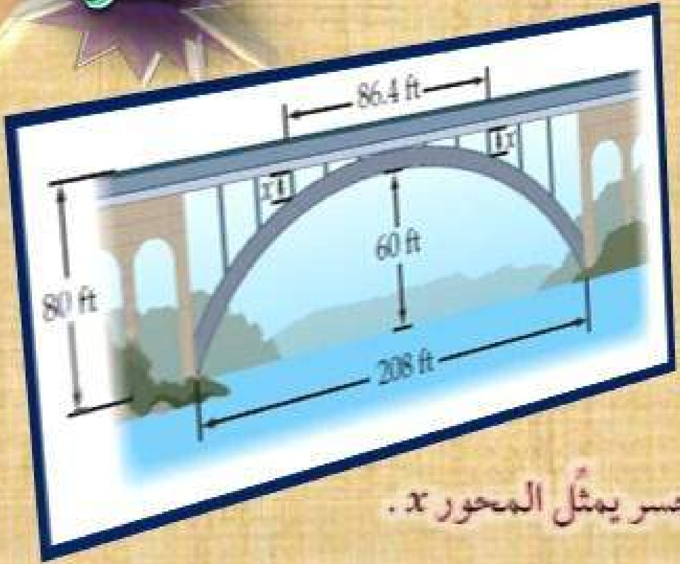
30 الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$

مفتوح إلى أعلى

31 البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

مفتوح إلى اليمين

الحل



32 جسور: يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ، وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثّل المحور x.

$$x^2 = -180.27(y + 20)$$

b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

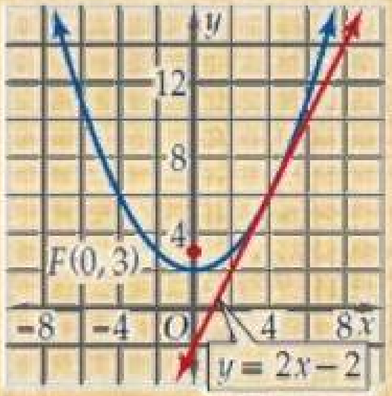
$30.35m$ تقريباً

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

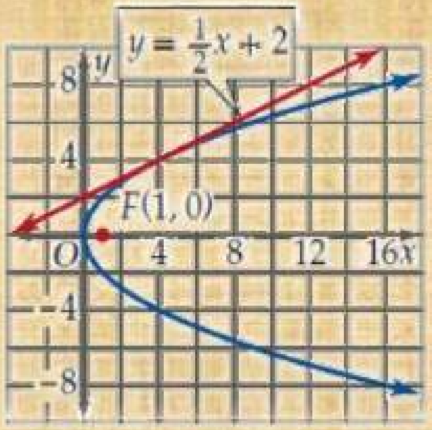
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

33



$$x^2 = 4(y - 2)$$

34



$$y^2 = 4x$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

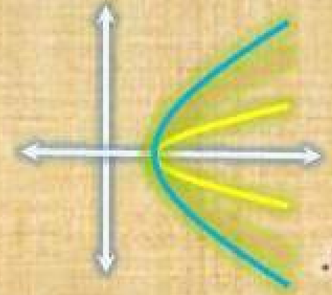
الحل

35 تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعا لتغير موقع البؤرة

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ ii) $y^2 = 8(x-2)$ iii) $y^2 = 16(x-2)$

i) وحدة واحدة ii) وحدتين iii) 4 وحدات



b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في فرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

عندما تتحرك البؤرة بعيداً عن الرأس يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسياً.

d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنه

$(x+1)^2 = 4(y+7)$

e) **تحليليًا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي: $x^2 = -5(y+1)$ ، $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -2(y+1)$ ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًا.

جميع القطوع المكافئة لها الرأس (1- , 0) ومنحنياتها مفتوحة إلى الأسفل. منحنى المعادلة $x^2 = -2(y+1)$ هو الأضيق، في حين ان منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.

القطوع الناقصة والدوائر

٤ـ٢

تدرب وحل المسائل

الحل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا. (مثال 1)

1 $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

❶ الاتجاه: رأسي

❷ المركز: $(-2, 0)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(-2, \pm 2\sqrt{2})$

* الرأسان: $(-2, \pm 7)$

* معادلته: $x = -2$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(-5, 0)$، $(1, 0)$

* معادلته: $y = 0$

2 $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

❶ الاتجاه: أفقي

❷ المركز: $(-4, -3)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(-4 \pm \sqrt{5}, -3)$

* الرأسان: $(-7, -3)$، $(-1, -3)$

* معادلته: $y = -3$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(-4, -1)$، $(-4, -5)$

* معادلته: $x = -4$

عودة لفهرس الفصل (٤)

حلول منصة مدرسية تعليمية

الحل

3 $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

❶ الاتجاه: أفقي

❷ المركز: $(7 , -2)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(7 \pm 4\sqrt{2} , -2)$

* الرأسان: $(13 , -2)$،$(1 , -2)$

* معادلته: $y = -2$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(7 , 0)$،$(7 , -4)$

* معادلته: $x = 7$

4 $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

❶ الاتجاه: رأسي

❷ المركز: $(8 , 6)$

❸ **المحور الأكبر:**

* البؤرتان: $(8 , 6 \pm 2\sqrt{3})$

* الرأسان: $(8 , 2)$ ، $(8 , 10)$

* معادلته: $x = 8$

❹ **المحور الأصغر:**

* الرأسان المرافقان: $(10 , 6)$،$(6 , 6)$

* معادلته: $y = 6$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5 الرأسان $(-5, -3), (11, -3)$ ، والبؤرتان $(-7, -3), (13, -3)$

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

6 الرأسان $(4, 3), (4, -9)$ ، وطول المحور الأصغر 8

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

7 نهايتا المحور الأكبر $(-13, 2), (1, 2)$ ، ونهايتا المحور الأصغر $(-6, 4), (-6, 0)$.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

8 البؤرتان $(-6, 9), (-6, -3)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

$$\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$$

9 الرأسان المرافقان $(-13, 7), (-3, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

$$\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

حدِّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

10 $\frac{(x+5)^2}{72}+\frac{(y-3)^2}{54}=1$

$e = 0.5$

11 $\frac{(x+6)^2}{40}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$

$e = 0.837$

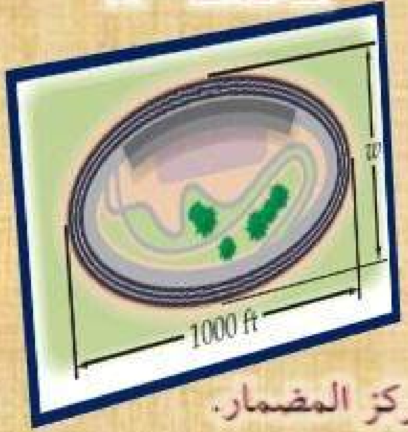
12 $\frac{(x-8)^2}{14}+\frac{(y+3)^2}{57}=1$

$e = 0.869$

13 $\frac{(x+8)^2}{27}+\frac{(y-7)^2}{33}=1$

$e = 0.426$

14 سباق: يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75. (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

$661.44ft$

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

$$\frac{x^2}{250000}+\frac{y^2}{109375}=1$$

الحل

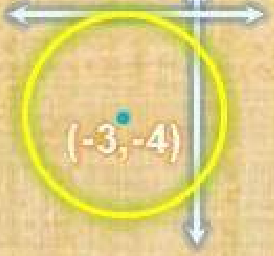
اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًا. (مثال 5)

15 المركز (3, 0)، و نصف القطر 2.

$(x-3)^2 + y^2 = 4$

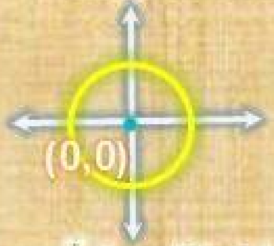
16 المركز (−3, −4)، والقطر 8.

$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 36$



17 المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7.

$x^2 + y^2 = 49$



اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18 (2, 1) , (2, −4)

$(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$

19 (−4, −10) , (4, −10)

$x^2 + (y+10)^2 = 16$

20 (5, −7) , (−2, −9)

$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+8)^2 = \frac{53}{4}$

21 (−6, 4) , (4, 8)

$(x+1)^2 + (y-6)^2 = 29$

الحل

22 معادلات: استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

23 بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، إذا كان قطر الشمس 870000 ميل تقريبا، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

71.35 مليون ميل تقريباً

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

0.203

منصة مدرسية تعليمية

الحل

أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24 $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

❶ المركز: $(-5,0)$

❷ البؤرتان: $(-2,0)$، $(-8,0)$

❸ الرأسان: $(-1,0)$، $(-9,0)$

25 $9y^2-18y+25x^2+100x-116=0$

❶ المركز: $(-2,1)$

❷ البؤرتان: $(-2,-3)$، $(-2,5)$

❸ الرأسان: $(-2,-4)$، $(-2,6)$

26 $65x^2+16y^2+130x-975=0$

❶ المركز: $(-1,0)$

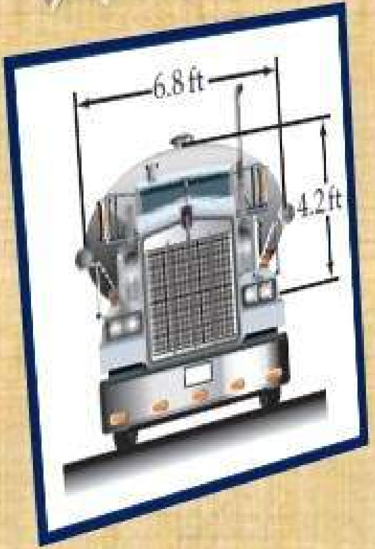
❷ البؤرتان: $(-1,-7)$، $(-1,7)$

❸ الرأسان: $(-1,-\sqrt{65})$، $(-1,\sqrt{65})$

الحل

27

شاحنات: تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

$$\frac{x^2}{11.56} + \frac{y^2}{4.41} = 1$$

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثل المقطع العرضي للخزان.

0.79

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28 الرأسان $(10, 0)$, $(-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

29 الرأسان المرافقان $(6, 1)$, $(0, 1)$، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

30 المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

31 الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع، ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.

اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

$$\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

32 هندسة: تتقاطع المستقيمات $x - 3y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكل مثلثا اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

$$(x - 6.5)^2 + (y - 4.5)^2 = 32.5$$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33 $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

34 $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

$$(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 16$$

35 $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

$$x^2 + (y - 6)^2$$

36 $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$$

القطوع الزائدة

٤ـ٣

تدرب وحل المسائل

الحل

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا: (مثال 1)

1 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(0, 0)$
3. الرأسان: $(0, \pm 2)$
4. البؤرتان: $(0, \pm\sqrt{21})$
5. خطا التقارب: $y = \pm \frac{2\sqrt{17}}{17}x$

2 $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(0, 0)$
3. الرأسان: $(\pm 7, 0)$
4. البؤرتان: $(\pm\sqrt{79}, 0)$
5. خطا التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{30}}{7}x$

عودة لفهرس الفصل (٤)

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

3 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{21} = 1$

❶ الاتجاه: أفقي
❷ المركز: $(0, 0)$
❸ الرأسان: $(\pm 3, 0)$
❹ البؤرتان: $(\pm\sqrt{30}, 0)$
❺ خطا التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}x$

4 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{14} = 1$

❶ الاتجاه: رأسي
❷ المركز: $(0, 0)$
❸ الرأسان: $(0, \pm 5)$
❹ البؤرتان: $(0, \pm\sqrt{39})$
❺ خطا التقارب: $y = \pm \frac{5\sqrt{14}}{14}x$

5 $3x^2 - 2y^2 = 12$

❶ الاتجاه: أفقي
❷ المركز: $(0, 0)$
❸ الرأسان: $(\pm 2, 0)$
❹ البؤرتان: $(\pm\sqrt{10}, 0)$
❺ خطا التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$

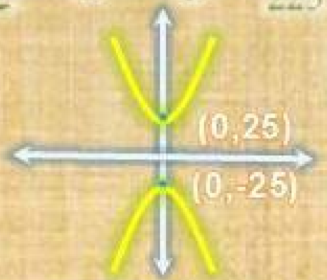
6 $3y^2 - 5x^2 = 15$

❶ الاتجاه: رأسي
❷ المركز: $(0, 0)$
❸ الرأسان: $(0, \pm\sqrt{5})$
❹ البؤرتان: $(0, \pm 2\sqrt{2})$
❺ خطا التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}x$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

7 إضاءة: يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$ ، مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًا. (مثال 1)



اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه، ومثّل منحناه بيانيًا: (مثال 2)

8 $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

$$\frac{(x-3)^2}{32} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: أفقي
2. المركز: $(3, -1)$
3. الرأسان: $(3 \pm 4\sqrt{2}, -1)$
4. البؤرتان: $(3 \pm 2\sqrt{10}, -1)$
5. خطا التقارب: $y + 1 = \pm 2(x - 3)$

9 $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{27} = 1$$

خصائص القطع :

1. الاتجاه: رأسي
2. المركز: $(-2, -1)$
3. الرأسان: $(-2, -4)$ ، $(-2, 2)$
4. البؤرتان: $(-2, -7)$ ، $(-2, 5)$
5. خطا التقارب: $y + 1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

10

$$-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$$

$$\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+7)^2}{10} = 1$$

خصائص القطع :

❶ الاتجاه: رأسي

❷ المركز: $(-7,2)$

❸ الرأسان: $(-7,7)$، $(-7,-3)$

❹ البؤرتان: $(-7,2 \pm \sqrt{35})$

❺ خطا التقارب: $y-2 = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$

12

$$16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

خصائص القطع :

❶ الاتجاه: أفقي

❷ المركز: $(-4,2)$

❸ الرأسان: $(-7,2)$، $(-1,2)$

❹ البؤرتان: $(1,2)$، $(-9,-2)$

❺ خطا التقارب: $y-2 = \pm \frac{4}{3}(x+4)$

11

$$9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$$

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

خصائص القطع :

❶ الاتجاه: رأسي

❷ المركز: $(4,3)$

❸ الرأسان: $(4,5)$، $(4,1)$

❹ البؤرتان: $(4,3 \pm \sqrt{13})$

❺ خطا التقارب: $y-3 = \pm \frac{2}{3}(x-4)$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13 البؤرتان $(-1, -7), (-1, 9)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

$$\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

14 الرأسان $(-5, 5), (7, 5)$، والبؤرتان $(-9, 5), (11, 5)$.

$$\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$$

15 الرأسان $(-1, 3), (-1, 9)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

16 البؤرتان $(-17, 7), (9, 7)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

$$\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

17 المركز (2 ,7−)، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًا وطوله 10 وحدات.

$$\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

18 الرأسان (2− ,2) ,(10 ,2)، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

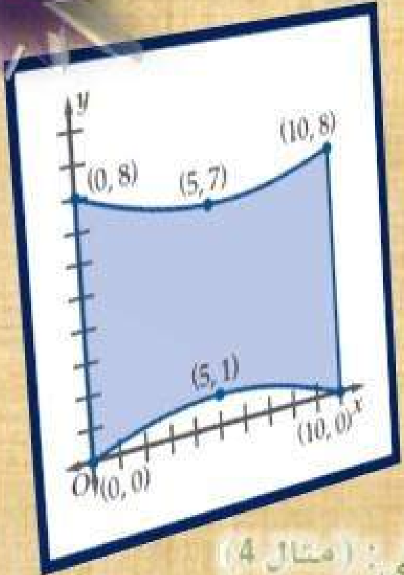
$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$$

19 الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند (2− ,13) ,(2− ,1−).

$$\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل



20 **هندسة معمارية :** يبيّن الشكل المجاور مخطط أرضية مكتب.

a) اكتب معادلة تمثل فرعي المنحنى في الشكل.

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{\frac{225}{7}} = 1$$

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 15 ft . فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

90ft

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21 $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

1.52

22 $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

1.27

23 $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

1.06

24 $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

1.33

25 $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

1.52

26 $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

2.83

حلول
منصة مدرسية تعليمية

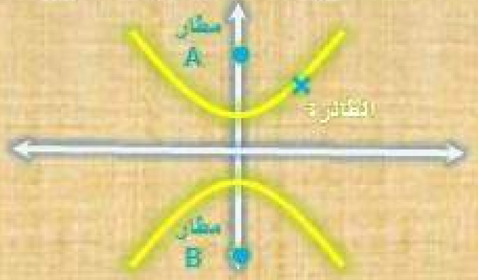
الحل

27 **طيران:** يقع المطاران A, B على بعد 72km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A. وعند لحظة ما كان بعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18km عن بعدها عن المطار A. (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$$

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.



c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

(40 , 13.7)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

28 **هندسة معمارية :** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8m، فما معادلة القطع الزائد؟

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$$

b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

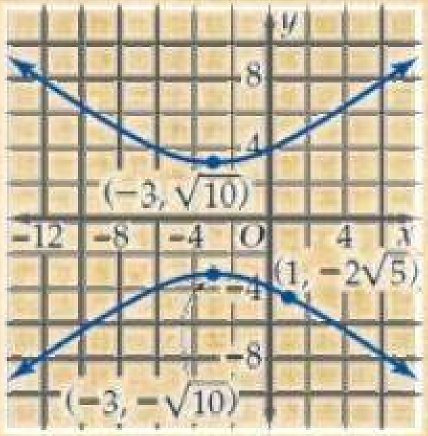
نصف قطر القمة 4.3m تقريباً ونصف قطر القاعدة 5.7m تقريباً

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

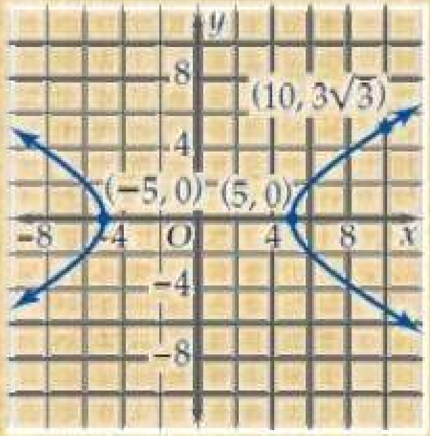
اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا في كل مما يأتي:

29



$$\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$$

30



$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

31

طقس: يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

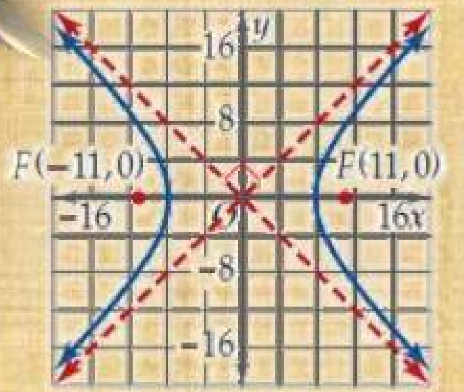
$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

32

يشكل القطع الزائد المتساوي الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، و $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًا أدناه.



$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

33 **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق، ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًا:** مثّل منحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

b) **تحليليًا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

البؤرتان للمنحنى الأول ، هما: (0 , 10-),(0 , 10) والبؤرتان للمنحنى الثاني هما (10-,0),(0,10)، والرأسان للمنحنى الأول هما: (6,0-)(6,0) والرأسان للمنحنى الثاني هما: (6-,0),(0,6) والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

c) **تحليليًا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

d) **بيانيًا:** مثّل منحنيي القطعين.

e) **لفظيًا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

القطعان الزائدان المترافقان لهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين في كل منهما.

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تدريب وحل المسائل

الحل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًا: (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

عودة لفهرس الفصل (٤)

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

حاول

منصة مدرسية تعليمية

7. $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8. $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9. $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10. $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11. $16xy + 8x^2 + 8y^2 - 18x + 8y = 13$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

12 طيران: في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي التي تمثله: (مثال 3)

13 $x^2 - y^2 = 9; \theta = \frac{\pi}{3}$

14 $xy = -8; \theta = 45°$

15 $x^2 - 8y = 0; \theta = \frac{\pi}{2}$

16 $2x^2 + 2y^2 = 8; \theta = \frac{\pi}{6}$

17 $y^2 + 8x = 0; \theta = 30°$

18 $4x^2 + 9y^2 = 36; \theta = 30°$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ : (مثال 4)

19 $(x')^2 + 3(y')^2 = 8;\ \theta = \frac{\pi}{4}$

20 $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$

21 $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{3}$

22 $(x')^2 = 8y';\ \theta = 45°$

23 $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{6}$

24 $4x' = (y')^2;\ \theta = 30°$

25 $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1;\ \theta = 45°$

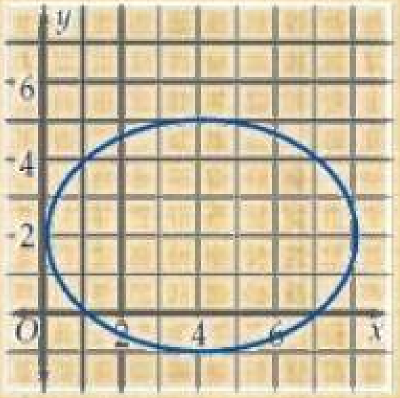
26 $(x')^2 = 5y';\ \theta = \frac{\pi}{3}$

منصة مدرسية تعليمية

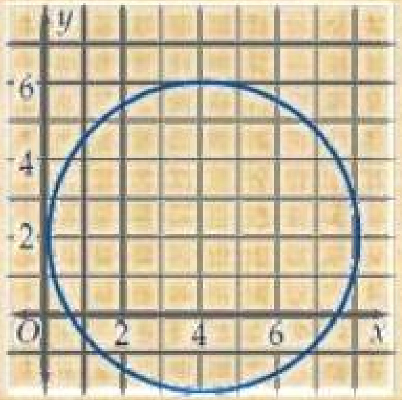
الحل

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثل كل منها:

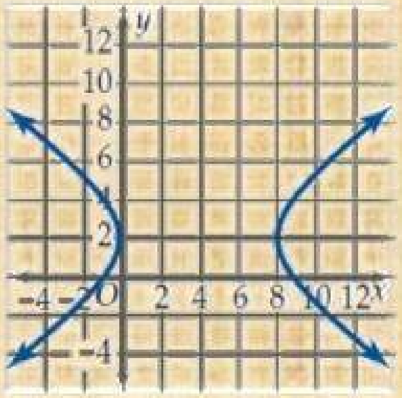
27



28



29



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

حلول

منصة مدرسية تعليمية

الحل

30 ضوء: ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكلاً قطعًا مخروطيًا، افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$، حدّد نوع القطع، ومثّل منحناه بيانيًا.

قابل بين كل حالة في التمارين 22 - 19 مع المعادلة التي تمثلها من a - d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

منصة مدرسية تعليمية

الحل

31 **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft .

32 **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

33 **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

34 **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

35 تمثيلات متعددة: افترض أن مركز قطع ناقص $(2, -3)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليلياً:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًّا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.

d) **جبريًّا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في **(b)** في المستوى $x'y'$.

d) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًّا.

المعادلات الوسيطية

٤_٥

تدرب وحل المسائل

الحل

مثّل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1)

1) $x = t^2 + 3, y = \frac{t}{4} - 5; -5 \le t \le 5$

2) $x = \frac{t^2}{2}, y = -4t; -4 \le t \le 4$

عودة لفهرس الفصل (٤)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

3 $x = -2t^2, y = \frac{t}{3} - 6; -5 \leq t \leq 5$

4 $x = \frac{t}{2}, y = -\sqrt{t} + 5; 0 \leq t \leq 8$

5 $x = t^2 - 4, y = 3t - 8; -5 \leq t \leq 5$

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا، وحدّد المجال: (المثالان 2, 3)

6) $y = t^2 - 7, x = 3t + 9$

7) $y = 5t, x = t^2 - 2$

8) $y = -4t + 3, x = t^2 + 1$

9) $y = 2t^2 + 8, x = 5t - 1$

10) $y = \frac{6t}{5} + 9, x = 4t^2$

11) $y = \frac{t^2}{6} - 7, x = \frac{t}{3} + 2$

12) **ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد t ثانية ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد t ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$، حيث x, y مقيسة بالأقدام.
اكتب معادلة ديكارتية تمثل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 < t \leq 5$. (مثال 3)

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا: (مثال 4)

13 $x = 3\cos\theta, y = 5\sin\theta$

14 $x = 7\sin\theta, y = 2\cos\theta$

15 $x = 6\cos\theta, y = 4\sin\theta$

16 $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$

17 $x = 8\sin\theta, y = \cos\theta$

18 $x = 5\cos\theta, y = 6\sin\theta$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثلان المعادلة المعطاة، ثم مثل المنحنى بيانيًا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5)

19) $t = 3x - 2, y = x^2 + 9$

20) $t = 2 - \frac{x}{3}, y = \frac{x^2}{12}$

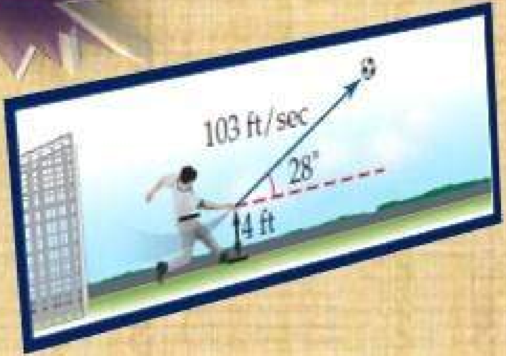
21) $t = \frac{x}{5} + 4, y = 10 - x^2$

22) $t = \frac{1-x}{2}, y = \frac{3-x^2}{4}$

منصة مدرسية تعليمية

الحل

23 **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 37 ft/s لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها 28°. حدّد المسافة التي قطعتها الكرة. (مثال 6)



اكتب كل معادلتين وسيطتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًا، وحدّد المجال:

24
$x = \sqrt{t} + 4$
$y = 4t + 3$

25
$x = \log t$
$y = t + 3$

26
$x = \sqrt{t - 7}$
$y = -3t - 8$

27
$x = \log (t - 4)$
$y = t$

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

28 كرة التنس: ضرب جمال كرة تنس من علو ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها 13°.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية.

b) ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟

حاول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

قابل بين كل زوج من المعادلات الوسيطية الآتية ومنحناها أدناه:

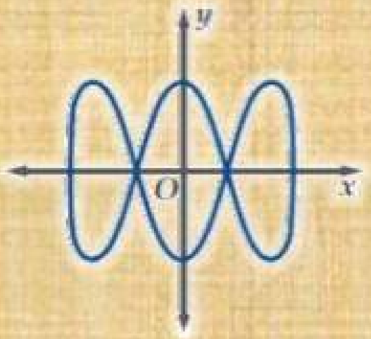
29 $x = \cos 2t, y = \sin 4t$

30 $x = \cos 3t, y = \sin t$

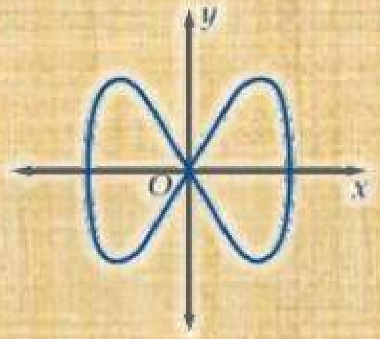
31 $x = \cos t, y = \sin 3t$

32 $x = \cos 4t, y = \sin 3t$

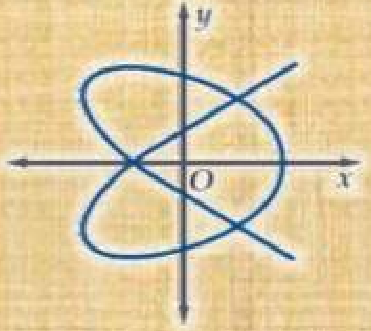
(a



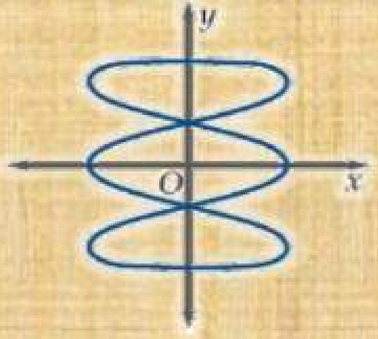
(b



(c



(d



حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

33

أحياء: يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية $0.75\,m/s$ ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها $45°$. وينخفض سطح الجدول $0.3\,m$ عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن g تساوي $9.8\,m/s^2$.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t مفترضًا أن سطح الماء يُمثّل بالمستقيم $y = 0$

b) إذا كان عرض الجدول $0.5\,m$، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟

حلول
منصة مدرسية تعليمية

الحل

34

سباق: اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله 100m. وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة 8.0m/s من النقطة (0, 2) وبتأخير 0.1s، بينما ركض سعيد بسرعة 8.1m/s من النقطة (0, 5) وبتأخير 0.3s

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور y كخط بداية ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور x.

b) من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق 200m بدلا من 100m فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

الحل

35 تمثيلات متعددة: سنستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج من مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور x.

a) **بيانيًا:** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$، حيث t مقيسة بالراديان.

b) **تحليليًا:** ما المسافة بين كل مقطعي x متتاليين؟ صف ما يمثّله مقطع x وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين متتاليين.

c) **تحليليًا:** ما أكبر قيمة لـ y؟ صف ما تمثله هذه القيمة وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

حلول
منصة مدرسية تعليمية

عودة للصفحة الرئيسية